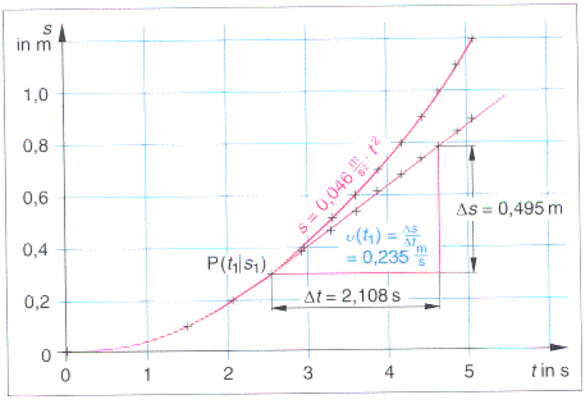
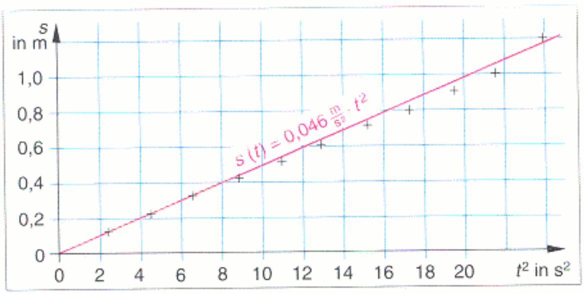
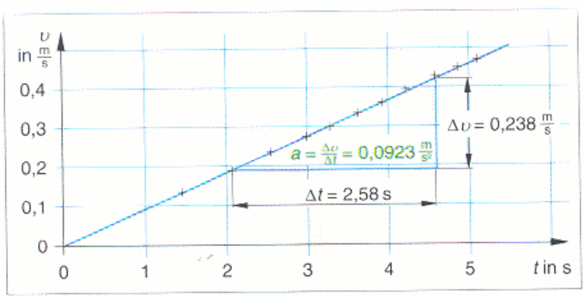
1.1.3 Die geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung



18.1 t-s-Diagramm zu Tab. 18.4. Die Momentangeschwindigkeit im Messpunkt $(t_1|s_1)$ liest man an der Steigung der Tangente ab.



18.2 Die Wege s_i sind proportional zu den Quadraten der Zeiten t_i



18.3 Der Graph der Intervallgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Zeit ist eine Gerade. Die Werte für $\Delta s/\Delta t$ sind jeweils in der Mitte der Zeitintervalle aufgetragen.

Ein Zug verlässt den Bahnhof und nimmt Fahrt auf. Ein Autofahrer fährt bei Grün an der Ampel los. Ein Läufer startet beim 100 m-Lauf.
In allen drei Fällen wird die Geschwindigkeit des Körpers von null an ständig gesteigert. Wir untersuchen einen solchen Startvorgang in einfacher Form auf der Fahrbahn.

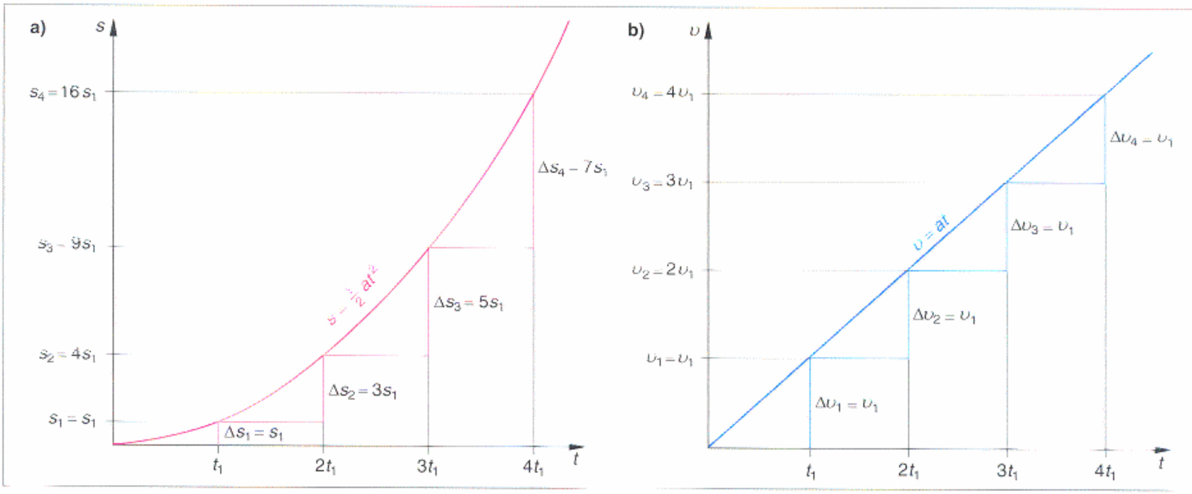
Versuch 1: Auf der waagerecht justierten Luftkissenfahrbahn (→ Abb. 15.1) wird der Gleiter durch ein angehängtes Metallstück in Bewegung gesetzt.
Beobachtung: Die Zeit-Weg-Kurve auf dem Bildschirm wie auch in der Aufzeichnung der Messwerte (Tab. 18.4) in dem Zeit-Weg-Diagramm (Abb. 18.1) ist ein Parabelast. Die Vermutung, dass der Weg s proportional zum Quadrat der Zeit t ist, überprüft man rechnerisch in der Zeit-Weg-Tabelle oder zeichnerisch, indem man die Wege über den Quadraten der Zeiten abträgt (Abb. 18.2).
Ergebnis: Die Auswertung ergibt $s/t^2 = C_1$.

Die Zeit-Weg-Funktion der untersuchten Bewegung hat damit eine einfache Form; sie lautet $s = C_1\,t^2$. Die Wege s sind proportional dem Quadrat der Zeiten t. Die Zeit-Weg-Kurve ist eine Parabel.

Was lässt sich über die Geschwindigkeit sagen?
Trägt man die Durchschnitts- oder Intervallgeschwindigkeiten $\bar{v} = \Delta s/\Delta t$ der einzelnen Zeitintervalle Δt zwischen je zwei aufeinander folgenden Messpunkten, die in Tab. 18.4 errechnet sind, über den Mitten t_m der Zeitintervalle Δt auf (Abb. 18.3), so liegen die Werte auf einer Ursprungsgeraden. Man erhält: $\bar{v} = C_2\,t_m$.
Wie man sieht, liegen die Werte der Intervallgeschwindigkeiten auf einer Geraden, wie klein man auch die Intervalle wählt. Die Gerade gibt also die *Geschwindigkeit v zu jedem Zeitpunkt* wieder.

a) t_i in s	0,000	1,476	2,085	2,561	2,950	3,301	3,605	3,895	4,172	4,418	4,658	4,890	5,102	
s_i in m	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	1,100	1,200	
s_i/t_i^2 in 10^{-2} m/s²		4,59	4,60	4,57	4,60	4,59	4,62	4,61	4,60	4,61	4,61	4,60	4,60	4,60
Δt in s	1,476	0,609	0,476	0,389	0,351	0,304	0,290	0,277	0,246	0,240	0,232	0,212		
$\Delta s/\Delta t$ in 10^{-1} m/s	0,678	1,642	2,101	2,571	2,849	3,289	3,448	3,610	4,065	4,167	4,310	4,719		
t_m in s	0,738	1,781	2,323	2,756	3,126	3,453	3,750	4,034	4,295	4,538	4,774	4,996		
v/t_m in 10^{-2} m/s²	9,19	9,22	9,04	9,33	9,11	9,53	9,19	8,95	9,46	9,18	9,03	9,45		9,20
b) gleichförmig bis $s_3 = 0{,}3$ m; s in m				0,300	0,393	0,475	0,548	0,617	0,682	0,739	0,795	0,851	0,901	

18.4 Zeit-Weg-Tabelle einer Messung nach Versuch 1. **a)** Auswertung: In der letzten Spalte stehen die errechneten Mittelwerte für s_i/t_i^2 bzw. v/t_m. **b)** Von $s_6 = 0{,}3$ m fährt der Gleiter ohne angehängtes Metallstück mit der Momentangeschwindigkeit in s_6 weiter; registriert werden von dort ab die s-Werte in Abhängigkeit der Zeiten t_i (1. Zeile) zur Messung der Momentangeschwindigkeit.



19.1 Grafische Darstellung der geradlinig gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Ändern sich die Zeiten um gleiche Beträge, so nehmen die Wege wie die ungeraden Zahlen zu **(a)**, während die Geschwindigkeiten immer um den gleichen Betrag ansteigen **(b)**.

Wir halten fest: Die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion der Bewegung lautet $v = C_2\, t$. Die Geschwindigkeit v wächst proportional der Zeit t.

Was aber bedeuten die beiden Konstanten C_1 und C_2 physikalisch?
C_2 ist geometrisch die Steigung der Zeit-Geschwindigkeit-Geraden (Abb. 18.3). Der Quotient $\Delta v / \Delta t$ lässt sich physikalisch einfach deuten: Er macht eine Aussage über die Änderung der Geschwindigkeit Δv innerhalb der Zeit Δt, für die der Begriff **Beschleunigung** a (a accelerare, lat. beschleunigen) eingeführt ist.

Die **Intervall-** oder **Durchschnittsbeschleunigung** $\bar{a}$ zwischen zwei beliebigen Messpunkten $(t_1 | v_1)$ und $(t_2 | v_2)$ ist der Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung $\Delta v = v_2 - v_1$ und der dabei verflossenen Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Die Einheit der Beschleunigung ist

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{1\ \text{m/s}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{m/s}^2.$$

Beschleunigung $a = 1\ \text{m/s}^2$ heißt: In der Zeit $\Delta t = 1$ s ändert sich die Geschwindigkeit v um $\Delta v = 1$ m/s.

$C_2 = \Delta v / \Delta t$ ist also die Intervallbeschleunigung a; und da die Intervallbeschleunigung konstant ist, gibt C_2 die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt an. Die untersuchte Bewegung ist folglich durch eine konstante Beschleunigung charakterisiert. Man sagt: Die Bewegung ist *gleichmäßig* beschleunigt.

Eine geradlinige **Bewegung mit konstanter Beschleunigung** (bei der die Beschleunigung nach Betrag und Richtung konstant bleibt) heißt **geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung.**

Aus der Proportionalität zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t ergibt sich die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion $v = a\,t$.

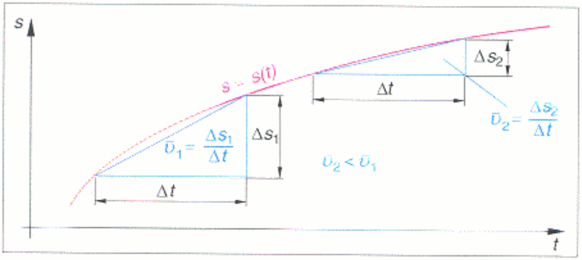
Der Vergleich der Konstanten $C_2 = a$ mit der Konstanten C_1 der Zeit-Weg-Funktion legt die Vermutung nahe (Tab 18.4), dass $C_1 = \frac{1}{2}\, C_2 = \frac{1}{2}\, a$ ist und die Zeit-Weg-Funktion $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$ lautet.
Das bestätigt folgende Überlegung: Aus $v = a\,t$ folgt als Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v} = (0 + a\,t)/2 = \frac{1}{2}\, a\, t$ und mit $s = \bar{v}\, t$ erhält man $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$.

Die **Bewegungsgesetze** der **geradlinig gleichmäßig beschleunigten Bewegung** lauten:
Zeit-Weg-Funktion $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$
Zeit-Geschwindigkeit-Funktion $v = a\,t$
mit konstanter Beschleunigung a.
Ihr Kennzeichen ist: Die Wege s sind proportional dem Quadrat der Zeiten t und die Geschwindigkeiten v proportional den Zeiten t selbst (Abb. 19.1).

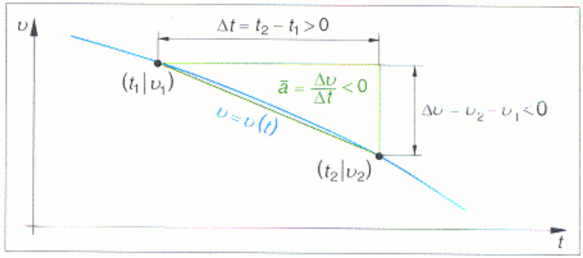
Wichtig ist auch folgender Zusammenhang:
Löst man die Gleichung $v = a\,t$ nach t auf und setzt den Ausdruck in $s = \frac{1}{2}\, a\, t^2$ ein, so ergibt sich:

$$v^2 = 2\, a\, s \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2\, a\, s}.$$

v ist die Endgeschwindigkeit, die ein Körper erreicht hat, nachdem er den Weg s mit konstanter Beschleunigung a durchlaufen hat.



20.1 Zeit-Weg-Diagramm einer Bewegung mit abnehmender Geschwindigkeit; die Sekantensteigungen $\Delta s/\Delta t = v$ nehmen ab. Die Beschleunigung ist negativ.



20.2 Eine negative Beschleunigung oder Verzögerung erkennt man im Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm an der negativen Steigung des Graphen: v_2 ist kleiner als v_1.

Positive und negative Beschleunigung

Die Beschleunigung a ist mithilfe der Differenz Δv von Geschwindigkeiten definiert. Sie ist daher wie die Geschwindigkeit ein **Vektor.** Vollständig ist die Beschleunigung daher durch Größenwert *und* Richtung bestimmt.

Bei einer eindimensionalen Bewegung kommt die Vektoreigenschaft der Beschleunigung im Vorzeichen von a zum Ausdruck:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Die Beschleunigung a ist positiv $a > 0$, wenn $\Delta v = v_2 - v_1$ positiv und damit v_2 größer als v_1 ist: Die Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit zu („mit der Zeit" heißt $t_2 > t_1$).

Dagegen ist die Beschleunigung negativ $a < 0$, wenn v_2 kleiner als v_1 ist: Die Geschwindigkeit nimmt mit der Zeit ab.

Letzteres wäre im Versuch 1 der Fall, wenn man z. B. das Fahrbahnende leicht anheben würde. Nach dem Anstoßen nähme dann, wie eine entsprechende Messung ergäbe, die Geschwindigkeit des Gleiters proportional zur Zeit ab. Man spricht dann auch von einer gleichmäßig **verzögerten** Bewegung und sagt, der Gleiter wird *negativ beschleunigt* (Abb. 20.1 und 20.2).

Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Nach dem Zeit-Weg-Gesetz $s = C_1 t^2$ gilt für die Intervallgeschwindigkeit mit $t_1 \neq t_2$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{C_1 t_2^2 - C_1 t_1^2}{t_2 - t_1}$$
$$= C_1 \frac{(t_2 + t_1)(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = C_1 (t_2 + t_1)$$

Das gilt für beliebige Differenzen $t_2 - t_1$, im Grenzfall auch für die gesuchte (Momentan-)Geschwindigkeit, wenn die Zeiten $t_1 = t_2 = t$ zusammenfallen. Damit lautet das Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz: $v = 2 C_1 t$.

Mit diesem Gesetz ergibt sich für die Intervallbeschleunigung (wieder für $t_1 \neq t_2$)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2 C_1 t_2 - 2 C_1 t_1}{t_2 - t_1} = 2 C_1.$$

Andererseits war $a = C_2$, also ist $2 C_1 = C_2$, womit der Zusammenhang der Konstanten C_1 und C_2, wie im Versuch 1 experimentell gefunden, allgemein gezeigt ist.

Aus dem Zeit-Weg-Gesetz $s = C_1 t^2$ folgen
das Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz $v = 2 C_1 t$
das Zeit-Beschleunigung-Gesetz $a = 2 C_1$.

Dass die Intervallgeschwindigkeit gleich der Momentangeschwindigkeit zur Mitte t_m des Zeitintervalls Δt ist, folgt mathematisch aus dem Satz, nach dem bei einer Parabel 2. Grades die Sekantensteigung gleich der Tangentensteigung in der Intervallmitte ist.