Stetigkeit

Notiztitel 14.03.2008

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Diese Funktion hat für $x = 0$ eine

Definitionslücke

allerdings

beliebig kleinen

noch so kleinen

in jeder Umgebung des Wertes

von $x_0 = 0$

findet man auch einen Funktionswert

von $f(x)$

Definition der Stetigkeit:

f heißt an der Stelle x_0 stetig

wenn es zu jeder δ Umgebung von x_0

ein ε gibt, so dass

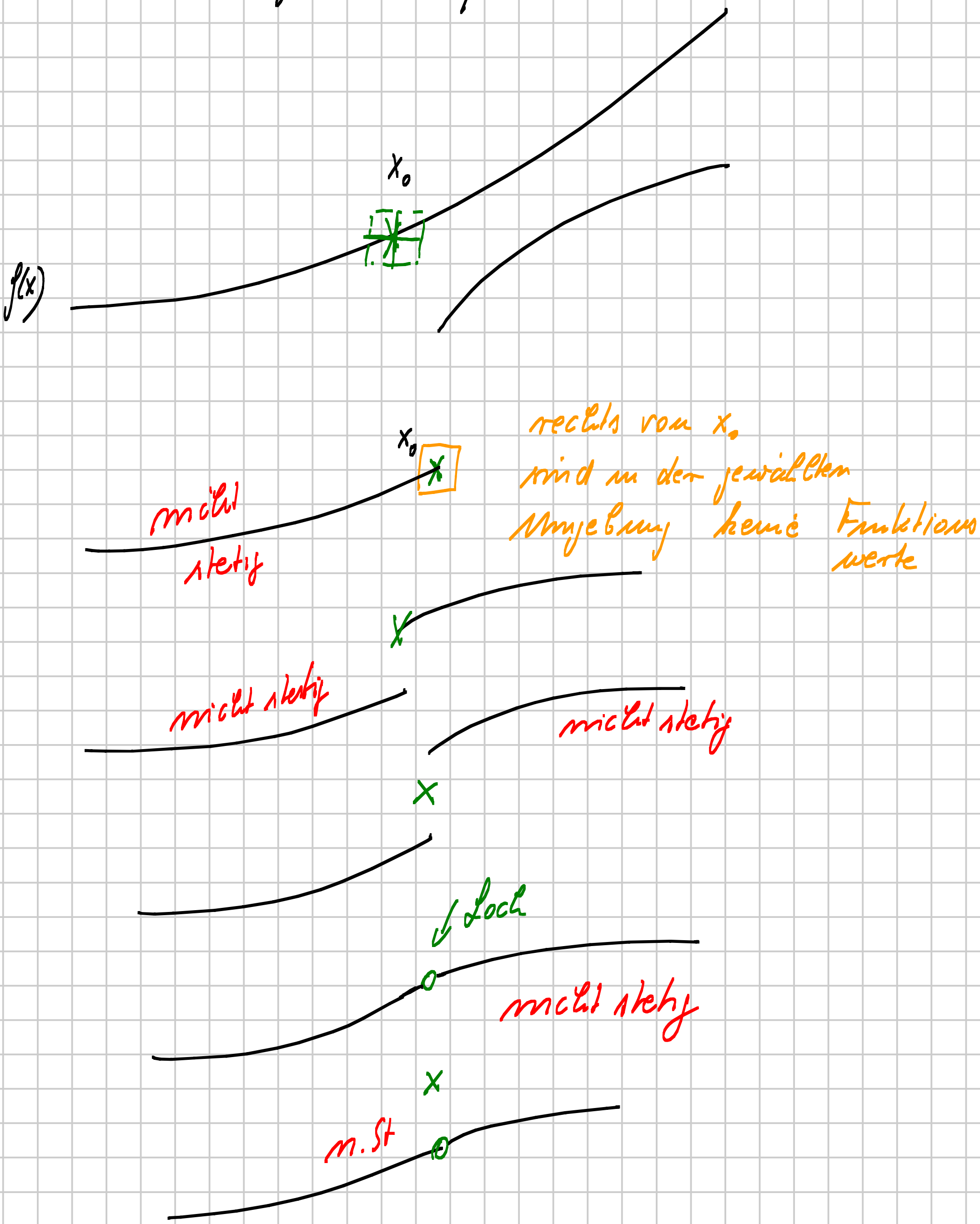
für jedes x_0 aus der δ-Umgebung

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$ (beliebig klein)

selbstverständlich ist $x_0 \in D_f$

einfache Beispiele

(mit der Hand gezeichnet)



Wir definieren eine neue Funktion die die Definitionslücke schließt.

Man macht dies so geschickt, dass diese neue Funktion überall stetig ist

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ heißt stetige Fortsetzung von $f(x)$

Bemerkung

$$f(x) = \sin x$$

Differenzenquotient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x+h}{2}}{h} =$$

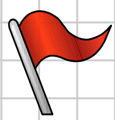
$$= \frac{\sin \frac{h}{2} \cdot \cos\left(\frac{2x}{2} + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Additionstheoreme

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$



$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

oB $$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$