Musterlösung Schulaufgabe 20 Februar 2008

Notiztitel 20.02.2008

1.Aufgabe:
Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x^2 - 3$ mit $D = \mathbb{R}$. Berechne die erste Ableitung dieser Funktion für $x_0 = 2$ ausführlich mit Hilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten!

Annäherung von rechts:

$$\lim_{h \to 0} \frac{[2(2+h)^2-3]-[2\cdot 2^2-3]}{2+h-2} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2(4+4h+h^2)-3-8+3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8+8h+2h^2-8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (+8+2h) = +8$$

Annäherung von links

$$\lim_{h \to 0} \frac{[2(2-h)^2-3]-[2\cdot 2^2-3]}{2-h-2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(4-4h+h^2)-3-8+3}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8-8h-2h^2-3-8-3}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (8+2h) = 8$$

linkseitiger und rechtsseitiger Grenzwert existiert und beide sind gleich 8 !

2.Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) Bestimme durch eine geschickte Umformung des gegebenen Terms $\lim_{x \to \infty} f(x)$

b) Berechne einen Wert s, ab dem sich die Funktionswerte um weniger als 0,001 vom Grenzwert der Funktion unterscheiden.

c) Weise nach, das der oben berechnete Grenzwert die Forderung der (im Unterricht ausführlich behandelten) Grenzwertdefinition erfüllt!

a) $$\frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} 3 + \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} 3 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 3$$

b) $$\left| \frac{3s+1}{s} - 3 \right| < 0{,}001$$

$$\left| 3 + \frac{1}{s} - 3 \right| < 0{,}001$$

$$\left| \frac{1}{s} \right| < 0{,}001$$

Betrag sind belanglos da $\frac{1}{s} > 0$

$$\frac{1}{s} < 0{,}001$$

$$1 < 0{,}001 \cdot s$$

$$\frac{1}{0{,}001} < s$$

$$s > 1000$$

c) allgemein muß zu jeder noch so kleinen Zahl ε eine solche Schranke t auffindbar sein!!

$$\left| \frac{3t+1}{t} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| 3 + \frac{1}{t} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{t} < \varepsilon$$

$$t > \frac{1}{\varepsilon}$$

qed

3. Aufgabe

3Aufgabe: Differenzierbarkeit

Gegeben ist eine abschnittsweise definierte Funktion $f: x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x & \text{wenn } x < 0 \\ mx & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$

Welchen Wert muss der Parameter m annehmen, sodass die Funktion f an der Stelle für x = 0 differenzierbar ist?

Berechnung des linksseitigen Grenzwertes des Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} =$$

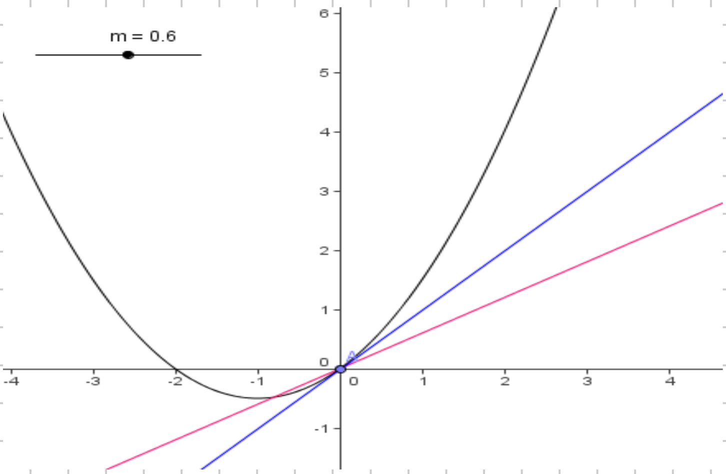
$f(0-h)$ $f(0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}(-h)^2 + (-h)\right] - 0}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}h^2 - h\right) : (-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \; -\frac{1}{2}h + 1 = 1$$

Der Parameter m muß 1 sein!



3.A be:

Gegeben sei die Funktion $g: x \to x^3 - 4x$ mit $x \in R$

a) Diskutiere zunächst die Ableitungsfunktion g´ der gegebenen Funktion, indem Du deren Nullstellen und ihren Scheitel bestimmst. Zeichne den Graphen von g´(x) sauber in ein Koordinatensystem ein !

b) Ohne jede weitere Berechnung sollst Du jetzt den Graphen der ursprünglich gegebenen Funktion in das selbe Koordinatensystem einzeichnen. (verwende dazu eine andere Farbe !) Zur Erleichterung beantworte zunächst noch einige Fragen:

α) Welche Eigenschaften hat ein Punkt des Graphen der Funktion, wenn dort seine Ableitungsfunktion eine Nullstelle hat ?

β) Welche Eigenschaften hat ein Punkt des Graphen der Funktion, wenn dort seine Ableitungsfunktion eine Tangente mit der Steigung Null hat ?

a.) $g'(x) = 3x^2 - 4$

Nullstellen $3x^2 - 4 = 0$

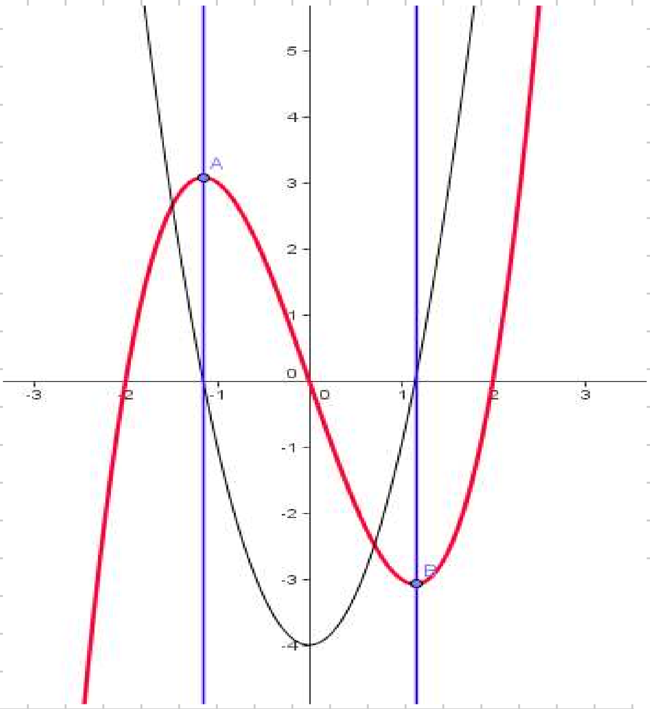
$x^2 = \frac{4}{3}$

entweder $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ oder $x = \sqrt{-\frac{4}{3}}$

Scheitel S: $y = 3x^2 - 4$

$y + 4 = 3x^2$

Scheitel $S(0 \mid -4)$



α Nullstelle Ableitungsfunktion

=

Stelle mit waagrechter Tangente der Funktion

β Ableitungsfkt Stelle mit waagrechter Tangente

=

Krümmungsänderung