einige Gedanken zur Differenzierbarkeit

Notiztitel 26.02.2008

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \qquad \text{für } x < 0$$

$$g(x) = mx - 2 \qquad \text{für } x \geq 0$$

Berechnung der Steigung der Funktion am Punkt $x_0 = 0$

(1) Annäherung von links

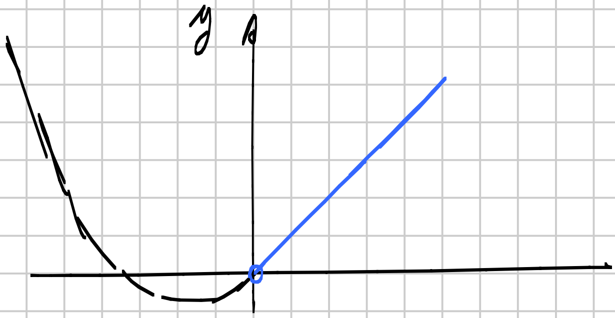
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - g(0)}{(0-h) - 0} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}(0-h)^2 + (0-h)\right] - 0}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}h^2 - h}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h\left(-\frac{1}{2}h + 1\right)}{-h}$$

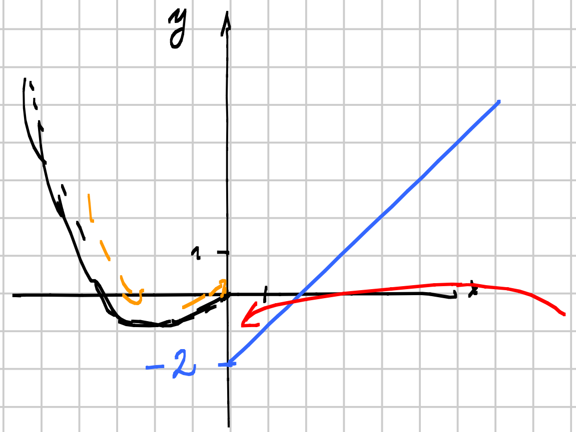
$$\lim_{h \to 0} \left(1 - \frac{1}{2}h\right) = 1$$

Die Steigung der Geraden muss bei dieser Aufgabe sein $m = 1$



veränderte Aufgabe $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \qquad x < 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g(x) = mx - 2 \qquad x \geq 0$



problematisch!

Diese veränderte Funktion erzeugt an der Stelle $x_0 = 0$ eine Situation die nicht akzeptabel ist.

Annäherung von links:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - g(0)}{-h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}h^2 - h\right] - (-2)}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{2}h + 1 - \frac{2}{h} \right)$$

Grenzwert existiert nicht

Es reicht ganz offensichtlich nicht aus daß bei Annäherung an die Schnittstelle ($x_0 = 0$) derselbe Wert für die Steigung existiert, sondern es müssen die beiden Graphen „nahtlos" ineinander übergehen

Eine Funktion $f: x \to f(x) \quad x \in D$

heißt im Definitionsbereich

Stetig

wenn gilt

$\lim f$